תרגילי בית 2. טורי פורייה, רמזים ופתרונות חלקיים.

גירסה 2.0 מיום 10.2.03. (תיקנתי תשובה לשאלה 3 סעיף (א).)

הערה: כמובן אנו מצפים שתדעו גם לנמק כל תשובותיכם לשאלות כאן.

---

1. בשני הסעיפים משתמשים בחלקים שונים של ההוכחה של משפט דיריכלה, כולל גירסה מתאימה של הלמה של רימן-לבג. **(א)** $\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)dx = 0$.

(ב) $\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[1-f(x)]\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\frac{dx}{\sin\frac{x}{2}} = \pi$.

---

2. **(א)** חישוב שגרתי. נוח לטפל קודם בנפרד בפונקציה הזוגית $|\sin x|$. **(ב)** התשובה היא "כן". אבל צריך להסביר גם מדוע. **(ג)** שימו לב שהטור הזה הוא דומה אבל לא בדיוק שווה לטור אשר מתקבל ע"י גזירה איבר איבר של טור פורייה של f. הטור הזה מתכנס עבור כל x ממשי. מדוע? **(ד)** $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$.

---

3. **(א)** הטורים הם: $\frac{1}{\pi}\left(e^{\pi}+\pi-1\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n e^{\pi}-1}{n^2+1}\cos nx$

ו $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left(\frac{n}{n^2+1}\left(1-(-1)^n e^{\pi}\right)+\frac{1}{n}\left(1-(-1)^n\right)\right)\sin nx$

(ב) הטור מתכנס בכל נקודה. נסמן את הסכום שלו ב $S(x)$. אזי:

$S(0)=2$, $S(\pi)=S(-\pi)=e^{\pi}+1$.

$S(x)=0$ **לכל** $x\in(-\pi,0)$,

$S(x)=2e^{x}+2$ **לכל** $x\in(0,\pi)$.

---

4. השתמשו בלמה של רימן-לבג, וגם בעובדה שלכל פונקציה אינטגרבילית $u:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ ולכל הקבועים a ו b, כך ש $-\pi\le a\le\pi$ מתקיים $\int_a^b u(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} v(x)dx$ כאשר $v(x)=\chi_{[a,b]}(x)\cdot u(x)$.

---

5. $x^4-2\pi^2x^2 \sim -\frac{7}{15}\pi^4+48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}\cos nx$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{90}\pi^4$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}=\frac{7\pi^4}{720}$

---

6. הטור הוא $f(x)\sim-\frac{i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n-1/2}$. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-1/2}$ מתבדר כי פונקציה $\frac{1}{x-1/2}$ יורדת בקטע $[1,\infty)$ ו $\lim_{N\to\infty}\int_1^N\frac{1}{x-1/2}dx=\infty$. (או השתמשו בעובדה ש $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר ו $\frac{1}{n-1/2}\ge\frac{1}{n}$.) הטיפול ב $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{-1}\frac{1}{n-1/2}$ דומה.

אין סתירה עם משפט דיריכלה כי במשפט דיריכלה משתמשים בטורים $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ רק במובן של "$P.V.$" (ראו את ההגדרה בניסוח של תרגיל 7.)

דווקא כאשר $x=0$ קל לבדוק שהפונקציה הנ"ל f מקיימת בדיוק את מסקנות משפט דיריכלה.
ליותר פרטים, כולל חישוב המקדמים $c_n=\frac{1}{n-1/2}$, ראו עמודים 2 ו 3 ב:
http://www.math.technion.ac.il/~mcwikel/fsguidop. ps

----

7. סכום הטור הוא 0. צריך לזהות את האינטגרלים $\int_0^1 x^3 e^{-ix(n+1)}dx$ כמקדמי פורייה של פונקציה מסויימת f. (ראו בהקשר זה את הרמז עבור שאלה 4.)

----

8. (א). זו גירסה יותר כללית של תרגיל 7. שימו לב ש $e^{in(x-t)}=e^{inx}\cdot e^{-int}$ והגורם e^{inx} הוא קבוע שמותר להוציא אותו החוצה מהאינטגרל.
לכן הטור הוא סכום (במובן $P.V.$) של טור פורייה של פונקציה מסויימת f בעלת הצורה $f(x)=g(x)\cdot\chi_{[a,b]}(x)$ עבור פונקציה מסויימת אחרת g. מה היא f במקרה שלנו?

(ב). הפונקציה f מסעיף (א) מקיימת את כל התנאים של משפט דיריכלה. לכן טור פורייה שלה מתכנסת ל $f_*(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$ כאשר $f_*(x):=\frac{\widetilde{f}(x+)+\widetilde{f}(x-)}{2}$ ו $\widetilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא הרחבה 2π מחזורית של f. בגלל מחזוריות, הסדרה של הסכומים החלקיים מתכנסת במ"ש על $[-\pi,\pi]$ אם ורק אם היא מתכנסת במ"ש על $\mathbb{R}$.
לכן אם f_* לא רציפה בנקודה כלשהי, אז ההתכנסות של הטור לא יכולה להיות במידה שווה ב $\mathbb{R}$ ולכן גם לא ב $[-\pi,\pi]$.
בגלל הצורה המיוחדת של f בתרגיל זה, אפשר לראות שיש התכנסות במ"ש בקטע $[-\pi,\pi]$ רק במקרה הטריביאלי כאשר $a=b$.

הנה תוצאה יותר כללית מבוססת על הרעיון של התרגיל הזה. מוכיחים אותו בעזרת המשפט על התכנסות במ"ש של טורי פורייה.

נניח שהפוקציה $g:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ רציפה ומקיימת $g(x)=\int_{-\pi}^x u(t)dt$ עבור כל $x\in[-\pi,\pi]$ כאשר u פונקציה ב $E[-\pi,\pi]$. נניח גם ש $g(-\pi)\neq g(\pi)$. אזי סדרת הפונקציות $\{S_N\}$ הנתונה ע"י

$$S_N(x)=\sum_{n=-N}^{N}\int_a^b g(t)e^{in(x-t)}dt$$

מתכנסת במ"ש על $[-\pi,\pi]$ אם ורק אם $a=b$ או $g(a)=g(b)=0$.
